Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Parte IV

Polinomios de Chebyshev

Ing. Ramón Abascal

**Profesor Titular de Análisis de Señales y Sistemas
y Teoría de los Circuitos II
en la UTN, Facultad Regional Avellaneda
Buenos Aires, Argentina**

2006

Polinomios de Chebyshev.

4.1 - Polinomios de Chebyshev.

Los Polinomios de Chebyshev están estrechamente ligados a la teoría de la aproximación de funciones, por lo que parecerían estar fuera de lugar en este trabajo dedicado a las Ecuaciones Diferenciales. No obstante introducimos aquí su tratamiento tanto por sus notables similitudes con los Polinomios de Legendre, como porque una de las principales aplicaciones de ambos la constituye el desarrollo de los filtros eléctricos, o filtros de ondas, de gran importancia en las ramas de la ingeniería eléctrica y electrónica. Esta aplicación la comparten también con las funciones de Bessel, que veremos en el próximo capítulo.

La función

$$C_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{4.1}$$

en la cual n es cualquier número natural, se conoce como *Polinomio de Chebyshev de orden n*.

Aunque a primera vista no parezca evidente, la función mencionada es en efecto un polinomio en x, finito para todo $x \neq \infty$, como probaremos a continuación.

En primer lugar, si $n = 0$, es obviamente:

$$C_0(x) = \cos(0 \arccos x) = \cos 0 = 1$$

A su vez, para $n = 1$,

$$C_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

Ahora bien, para calcular los polinomios sucesivos, se puede apelar a la fórmula de recurrrencia que demostraremos a continuación:

El Polinomio de orden n es, por definición (4.1):

$$C_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Y si llamamos, para simplificar,

$$u = \arccos x$$

reemplazando, obtenemos:

$$C_n(x) = \cos n u \tag{4.2}$$

A su vez, la función inversa de u es:

$$x = \cos u \tag{4.3}$$

De acuerdo con la definición dada más arriba, el Polinomio de orden $n + 1$, será:

$$C_{n+1}(x) = \cos[(n+1)u] = \cos(nu + u)$$

y el de orden n -1:

$$C_{n-1}(x) = \cos[(n-1)u] = \cos(nu - u)$$

Al aplicar las conocidas fórmulas del coseno de la suma y del coseno de la diferencia, las dos últimas igualdades quedan modificadas como sigue:

$$C_{n+1}(x) = \cos u \cos nu - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} nu$$

y

$$C_{n-1}(x) = \cos u \cos nu + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} nu$$

Al sumar miembro a miembro estas dos igualdades, y despejar luego, se obtiene:

$$C_{n+1}(x) = 2 \cos u \cos nu - C_{n-1}(x)$$

y reemplazando según (4.2) y (4.3):

$$C_{n+1}(x) = 2\,x\,C_n(x) - C_{n-1}(x) \qquad (4.4)$$

A partir de este resultado, es posible determinar, por reiteración, el polinomio que representa a cada una de las funciones de Chebyshev.

A continuación, a título de ejemplo, desarrollamos las primeras de ellas:

Ya vimos que

$$C_0(x) = 1$$

y

$$C_1(x) = x$$

Si aplicamos la fórmula (4.4), obtendremos, sucesivamente:

$$C_2(x) = 2\,x\,C_1(x) - C_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$C_3(x) = 2\,x\,C_2(x) - C_1(x) = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x$$

$$C_4(x) = 2\,x\,C_3(x) - C_2(x) = 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$C_5(x) = 2\,x\,C_4(x) - C_3(x) = 16x^5 - 16x^3 + 2x - 4x^3 + 3x =$$
$$= 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$C_6(x) = 2\,x\,C_5(x) - C_4(x) = 32x^6 - 40x^4 + 10x^2 - 8x^4 + 8x^2 - 1 =$$
$$= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$C_7(x) = 2\,x\,C_6(x) - C_5(x) = 64x^7 - 96x^5 + 36x^3 - 2x -$$
$$- 16x^5 + 20x^3 - 5x = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

etc.

4.2 - Existencia de la Función de Chebyshev para valores de $|x| > 1$.

El rango de existencia de las Funciones de Chebyshev definidas según la (4.1) es

$$-1 \leq x \leq 1,$$

puesto que la función arcos x no existe para cualquier valor de x de módulo mayor que 1:

$$| x | > 1,$$

Sin embargo, una simple inspección de los polinomios Cn (x) muestra que los mismos tienen sentido para cualquier valor no infinito de x . Cabe entonces hacerse la pregunta: ¿Habrá alguna expresión similar a cos (n arcos x), que permita extender la validez de las funciones de Chebyshev para cualquier valor de x cuyo módulo sea mayor que 1?.

La respuesta es afirmativa. En efecto, la función:

$$\gamma_n (x) = \operatorname{ch} (n \operatorname{arch} x) \tag{4.5}$$

tiene, para $x < -1$ y $x > 1$, igual significado que cos (n cos x) para $-1 < x < 1$, como veremos a continuación.

Comenzaremos por probar la validez de la expresión siguiente, que nos da el valor del coseno hiperbólico de una suma de dos números:

$$\operatorname{ch} (\alpha + \beta) = \operatorname{ch} \alpha \ \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \alpha \ \operatorname{sh} \beta$$

Efectivamente:

$$\operatorname{ch} \alpha \ \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \alpha \ \operatorname{sh} \beta = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} + \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} =$$

$$= \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{-\alpha+\beta} + e^{\alpha-\beta} + e^{-(\alpha+\beta)} + e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha+\beta} - e^{\alpha-\beta} + e^{-(\alpha+\beta)}}{4} =$$

$$= \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{-(\alpha+\beta)}}{2} = \operatorname{ch} (\alpha + \beta) \tag{4.6}$$

A continuación, llamaremos

$$\operatorname{arch} x = v \qquad \therefore \qquad x = \operatorname{ch} v$$

Reemplacemos este valor en la (4.5), y obtendremos:

$$\gamma_n (x) = \operatorname{ch} (n \operatorname{arch} x) = \operatorname{ch} nv$$

Si $\quad n = 0, \qquad \therefore \qquad \operatorname{ch} 0 = 1$

Vemos también que si $n = 1$, entonces

$$\gamma_1 (x) = \operatorname{ch} v = x$$

Ahora, a partir de la fórmula (4.6), reemplazando α y β por, respectivamente, nv y v, podemos hacer:

$$\gamma_{n+1} (x) = \operatorname{ch} [(n + 1) v] = \operatorname{ch} (nv + v) = \operatorname{ch} nv \,.\, \operatorname{ch} v + \operatorname{sh} nv \,.\, \operatorname{sh} v$$

De modo enteramente similar se demuestra la fórmula siguiente, simétrica de la anterior:

$$\gamma_{n-1} (x) = \operatorname{ch} [(n - 1) v] = \operatorname{ch} (nv - v) = \operatorname{ch} nv \,.\, \operatorname{ch} v - \operatorname{sh} nv \,.\, \operatorname{sh} v$$

El resultado de sumar miembro a miembro las dos últimas igualdades es:

$$\gamma_{n+1}(x) + \gamma_{n-1}(x) = 2 \text{ ch } v \,.\, \text{ch } nv = 2\, x\, \gamma_n(x)$$

Despejando $\gamma_{n+1}(x)$, resulta

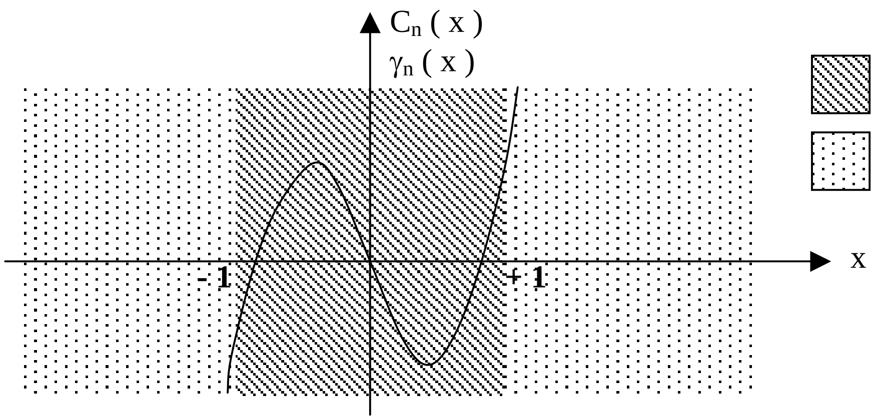
$$\gamma_{n+1}(x) = 2\, x\, \gamma_n(x) - \gamma_{n-1}(x)$$

De aquí se llega a la fórmula de recurrencia siguiente, que, como en el caso anterior, nos permitirá obtener todos los coeficientes, a partir del conocimiento de dos consecutivos:

$$\gamma_n(x) = 2\, x\, \gamma_{n-1}(x) - \gamma_{n-2}(x)$$

Para terminar, debemos decir que, como no existe el arco coseno hiperbólico de ningún número comprendido entre -1 y 1, tampoco existe la función $\gamma_n(x)$ en dicho rango.

Como conclusión, las funciones $C_n(x)$ y $\gamma_n(x)$ son, cada una de ellas, *prolongación analítica* de la otra. La figura siguiente muestra los respectivos dominios de definición.



4.3 - Propiedades y aplicaciones de las Funciones de Chebyshev.

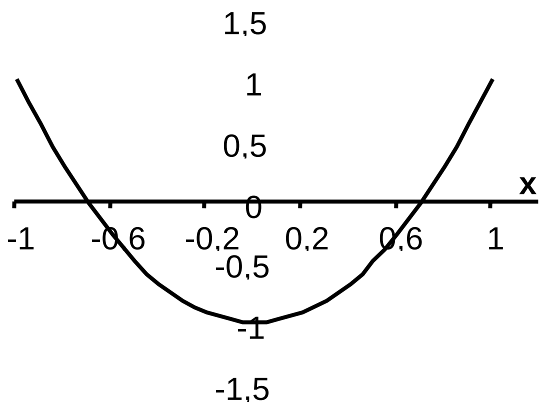
Demostrada la validez de la fórmula de recurrencia para cualquier valor de la variable x, podemos formalmente definir la Función de Chebyshev como se ve a continuación:

$$C_n(x) = \left| \begin{array}{lll} = \cos(n \arccos x) & \text{si} & 0 \leq |x| \leq 1 \\ = \gamma_n(x) = \cos(n \text{ ar ch } x) & \text{si} & |x| \geq 1 \end{array} \right.$$

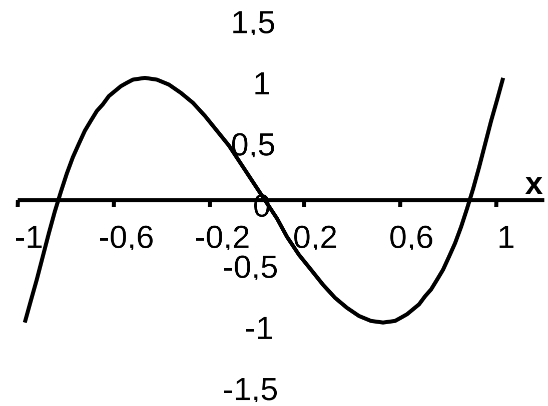
Esta definición permite extender la validez de los Polinomios de Chebyshev para todo el dominio de la variable x, desde $-\infty$ a $+\infty$.

A continuación representamos algunos de los polinomios:

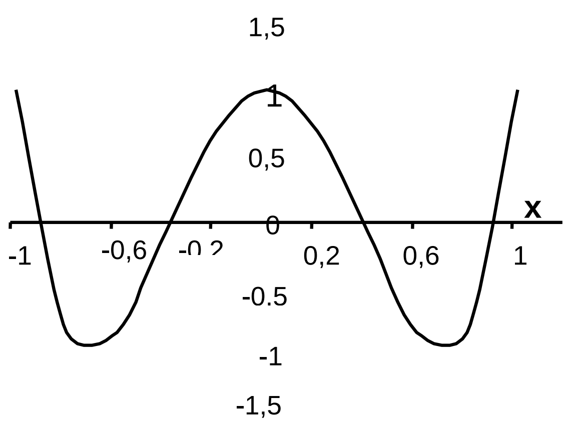
C_2 (x)



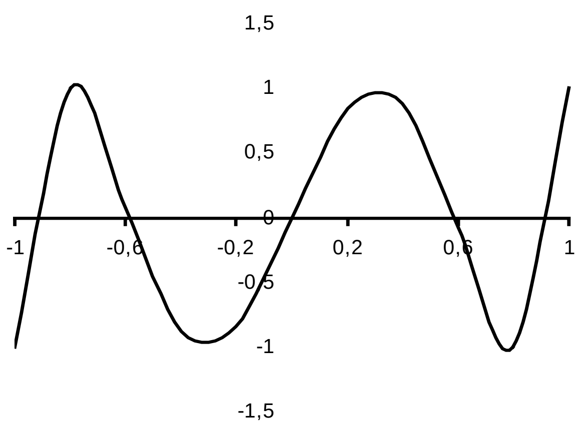
C_3 (x)



C_4 (x)

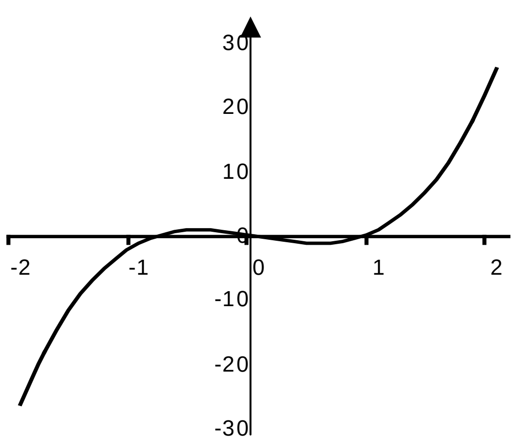


C_5 (x)



En la figura siguiente, representamos nuevamente la función C_3 (x), pero cambiando la escala, para una mejor comprensión de la forma del polinomio, cuando nos alejamos del valor x = 1.

C_3 (x)

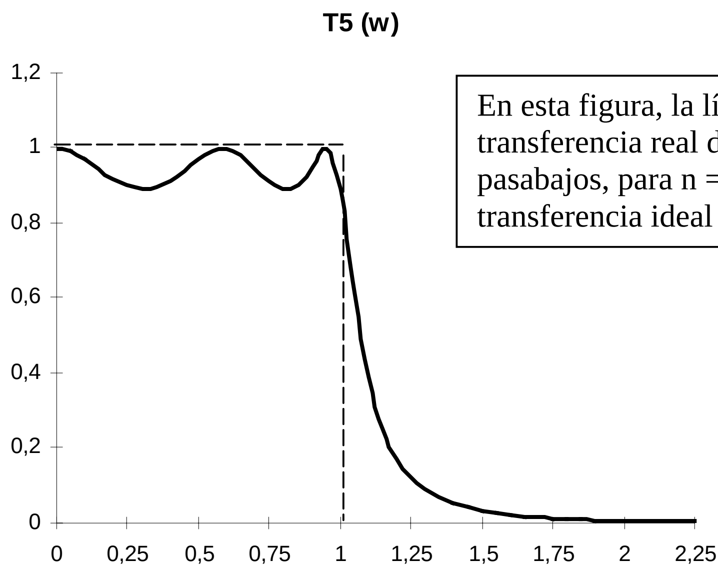


Las funciones de Chebyshev tienen una importante aplicación en la teoría de la aproximación de funciones, y, a través de la misma, en el desarrollo de filtros eléctricos analógicos.

A título de ejemplo, digamos que la transferencia T (ω) de un filtro Chebyshev es:

$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \, C_n^2(\omega)}}$$

En esta ecuación, ω representa la frecuencia angular o pulsación ($\omega = 2 \pi f$), ε es un factor de amortiguación de la ondulación o *ripple* ($0 < \varepsilon < 1$), y $C_n(\omega)$ el polinomio de orden n, en función de ω.



En esta figura, la línea gruesa representa la transferencia real de un filtro Chebyshev, pasabajos, para n = 5, mientras que la transferencia ideal se indica en línea de puntos

4.4 - Problemas.

4.4.1 - Expresar

a) El polinomio $C_5(x)$ como una suma algebraica de polinomios de Legendre:

$$C_5(x) = 16\, x^5 - 20\, x^3 + 5\, x$$

Solución: Recordemos que

$$P_5(x) = \frac{63}{8} x^5 - \frac{35}{4} x^3 + \frac{15}{8} x$$

Llamemos:

$$F_3 = C_5 - 16 \cdot \frac{8}{63} P_5(x) = -20 x^3 + 5x + \frac{160}{9} x^3 - \frac{16 \cdot 5}{21} x$$

$$= -\frac{20}{9} x^3 + \frac{25}{21} x$$

Hagamos ahora

$$F_1 = F_3 - \frac{20}{9} \cdot \frac{2}{5} P_3(x) = \frac{25}{21} x - \frac{4}{3} x = \frac{25 - 28}{21} x = -\frac{3}{21} P_1(x)$$

Respuesta:

$$C_5(x) = \frac{128}{63} P_5(x) - \frac{8}{9} P_3(x) - \frac{1}{7} P_1(x)$$

b) Idem, la función $C_4(x)$.

c) Idem, la función $C_6(x)$.

4.4.2 - Calcular las funciones $C_8(x)$ a $C_{10}(x)$, aplicando la fórmula de recurrencia a partir de

$$C_7(x) = 64 x^7 - 112 x^5 + 56 x^3 - 7x .$$

Respuesta:

$$C_8(x) = 132 x^8 - 256 x^6 + 160 x^4 - 32 x^2 + 1.$$

$$C_9(x) = 256 x^9 - 576 x^7 + 432 x^5 - 120 x^3 + 9x.$$

$$C_{10}(x) = 512 x^{10} - 1280 x^8 + 1120 x^6 - 400 x^4 + 50 x^2 - 1.$$

4.4.3 - Propiedades de las funciones de Chebyshev:

a) Verificar por inspección de las fórmulas respectivas, que para todas las funciones se cumple que:

$$C_n(0) = \begin{cases} = 0, & \text{si } n \text{ es impar} \\ = \pm 1, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

.

b) Verificar que todos los máximos y mínimos de la función $C_n(x)$ caen en el interior del intervalo $-1 \leq x \leq 1$

En efecto:

$$\frac{d}{dx} C_2(x) = 4x \qquad \therefore \qquad C_2(x) \text{ tiene un mínimo en } x = 0$$

$$\frac{d}{dx} C_3(x) = 12x^2 - 3 \qquad \therefore \qquad \text{Max / min en } x = \pm\frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx} C_4(x) = 32x^3 - 16x \qquad \therefore \qquad \text{Max / min en } x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y en } x = 0$$

etc.

c) Verificar que en todos los casos, la pendiente positiva máxima, dentro del intervalo

$$-1 \leq x \leq 1$$

ocurre cuando $x = 1$. Esta propiedad es de gran importancia en la aplicación de las funciones de Chebyshev para el diseño de filtros eléctricos.

Verificación: Observando las derivadas obtenidas en el problema b), podemos ver que el valor máximo de aquellas, en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, se produce en todos los casos cuando $x = 1$.

Analicemos, por ejemplo, la función $C_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$, cuya derivada es:

$$\frac{d}{dx} C_5(x) = 80x^4 - 60x^2 + 5$$

El valor máximo de la derivada, dentro del intervalo indicado, corresponde a $x = 1$, y es igual a

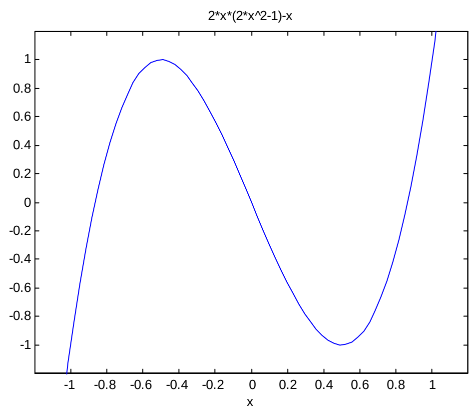
$$80 - 60 + 5 = 25$$

Adviértase que estamos diciendo, *el valor máximo de la derivada en el intervalo*, lo que de ninguna manera implica que dicha derivada tenga un máximo en ese punto.

Aplicaciones Matlab

- *Funciones de Chebyshev.*

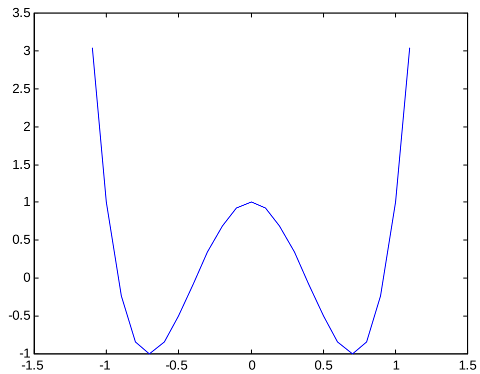
```
» % Cálculo de polinomios de Chebyshev por aplicación de la fórmula de recurrencia:
» syms x
» C0 = 1
C0 =     1
» C1 = x
C1 = x
» C2 = 2*x*C1 - C0
C2 =  2*x^2-1
» C3 = 2*x*C2 - C1
C3 =  2*x*(2*x^2-1)-x
» C4 = 2*x*C3 - C2
C4 =  2*x*(2*x*(2*x^2-1)-x)-2*x^2+1
» % Como ejemplo representamos C3:
» ezplot(C3)
» axis ([-1.2 1.2 -1.2 1.2])
»
```



- *Resolver el mismo problema en forma matricial:*

```
» x = [-1.1 : .1 : 1.1]
x =
  Columns 1 through 7
   -1.1000   -1.0000   -0.9000   -0.8000   -0.7000   -0.6000   -0.5000
  Columns 8 through 14
   -0.4000   -0.3000   -0.2000   -0.1000         0    0.1000    0.2000
  Columns 15 through 21
    0.3000    0.4000    0.5000    0.6000    0.7000    0.8000    0.9000
  Columns 22 through 23
    1.0000    1.1000
» % Cn = cos (n*arcos (x))
» % Ejemplo: Calcularemos y representaremos el polinomio de orden 4:
» C4 = cos(4*acos(x))
C4 =
  Columns 1 through 4
   3.0328 - 0.0000i   1.0000             -0.2312             -0.8432
  Columns 5 through 8
  -0.9992             -0.8432             -0.5000             -0.0752
  Columns 9 through 12
   0.3448              0.6928              0.9208              1.0000
```

```
Columns 13 through 16
   0.9208       0.6928       0.3448      -0.0752
  Columns 17 through 20
  -0.5000      -0.8432      -0.9992      -0.8432
  Columns 21 through 23
  -0.2312       1.0000       3.0328
» plot (x,C4)
```

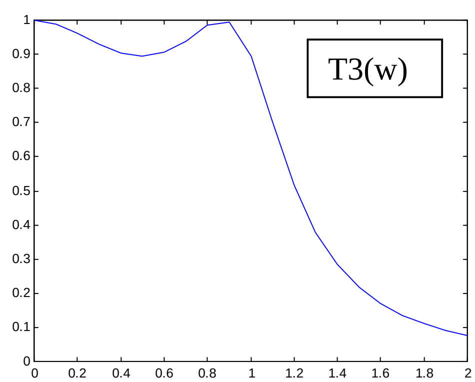


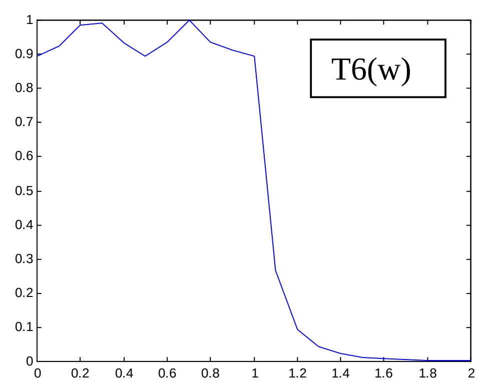
- *Calcular y representar la transferencia de un filtro Chebyshev, si n es igual:*
  n1 = 3, y
  n2 = 6.
  ¿En qué caso la respuesta se acerca más a la del filtro ideal? Ver la figura de la página 4.8.

```
» w = [0 : .1 : 2]
w =
  Columns 1 through 7
        0    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000    0.5000    0.6000
  Columns 8 through 14
   0.7000    0.8000    0.9000    1.0000    1.1000    1.2000    1.3000
  Columns 15 through 21
   1.4000    1.5000    1.6000    1.7000    1.8000    1.9000    2.0000
» n = 3          % Primer caso: n = 3
n =     3
» C3 = cos (3*acos(w))      % Coeficiente C3, expresado en forma matricial.
C3 =
  Columns 1 through 7
  -0.0000   -0.2960   -0.5680   -0.7920   -0.9440   -1.0000   -0.9360
  Columns 8 through 14
  -0.7280   -0.3520    0.2160    1.0000    2.0240    3.3120    4.8880
  Columns 15 through 21
   6.7760    9.0000   11.5840   14.5520   17.9280   21.7360   26.0000
» % Consideraremos en ambos casos que epsilon es igual a 0.5.
```

```
» epsilon = 0.5
epsilon =    0.5000
» % Llamaremos: an = 1+epsilon^2*Cn^2
» a3 = [1+epsilon^2*(C3(1,1))^2     1+epsilon^2*(C3(1,2))^2       1+epsilon^2*(C3(1,3))^2
1+epsilon^2*(C3(1,4))^2            1+epsilon^2*(C3(1,5))^2       1+epsilon^2*(C3(1,6))^2
1+epsilon^2*(C3(1,7))^2            1+epsilon^2*(C3(1,8))^2       1+epsilon^2*(C3(1,9))^2
1+epsilon^2*(C3(1,10))^2          1+epsilon^2*(C3(1,11))^2     1+epsilon^2*(C3(1,12))^2
1+epsilon^2*(C3(1,13))^2          1+epsilon^2*(C3(1,14))^2     1+epsilon^2*(C3(1,15))^2
1+epsilon^2*(C3(1,16))^2          1+epsilon^2*(C3(1,17))^2     1+epsilon^2*(C3(1,18))^2
1+epsilon^2*(C3(1,19))^2          1+epsilon^2*(C3(1,20))^2     1+epsilon^2*(C3(1,21))^2]
a3 =
  Columns 1 through 7
    1.0000    1.0219    1.0807    1.1568    1.2228    1.2500    1.2190
  Columns 8 through 14
    1.1325    1.0310    1.0117    1.2500    2.0241    3.7423    6.9731
  Columns 15 through 21
   12.4785   21.2500   34.5473   53.9402   81.3533  119.1134  170.0000
»
» % Por fin: T3 = (a3)^(-0.5)
» T3 = [(a3(1,1))^(-0.5) (a3(1,2))^(-0.5) (a3(1,3))^(-0.5) (a3(1,4))^(-0.5) (a3(1,5))^(-0.5)
(a3(1,6))^(-0.5)    (a3(1,7))^(-0.5)    (a3(1,8))^(-0.5)    (a3(1,9))^(-0.5)    (a3(1,10))^(-0.5)
(a3(1,11))^(-0.5)  (a3(1,12))^(-0.5)  (a3(1,13))^(-0.5)  (a3(1,14))^(-0.5)  (a3(1,15))^(-0.5)
(a3(1,16))^(-0.5)  (a3(1,17))^(-0.5)  (a3(1,18))^(-0.5)  (a3(1,19))^(-0.5)  (a3(1,20))^(-0.5)
(a3(1,21))^(-0.5)]
T3 =
  Columns 1 through 7
    1.0000    0.9892    0.9620    0.9298    0.9043    0.8944    0.9057
  Columns 8 through 14
    0.9397    0.9849    0.9942    0.8944    0.7029    0.5169    0.3787
  Columns 15 through 21
    0.2831    0.2169    0.1701    0.1362    0.1109    0.0916    0.0767
»
» % Segundo caso: n = 6
» C6 = cos (6*acos(w))
C6 =  1.0e+003 *
  Columns 1 through 7
   -0.0010   -0.0008   -0.0004    0.0003    0.0008    0.0010    0.0008
  Columns 8 through 14
    0.0001   -0.0008   -0.0009    0.0010    0.0072    0.0209    0.0468
  Columns 15 through 21
    0.0908    0.1610    0.2674    0.4225    0.6418    0.9439    1.3510
»
```

```
» a6 =[1+epsilon^2*(C6(1,1))^2   1+epsilon^2*(C6(1,2))^2        1+epsilon^2*(C6(1,3))^2
1+epsilon^2*(C6(1,4))^2          1+epsilon^2*(C6(1,5))^2         1+epsilon^2*(C6(1,6))^2
1+epsilon^2*(C6(1,7))^2          1+epsilon^2*(C6(1,8))^2         1+epsilon^2*(C6(1,9))^2
1+epsilon^2*(C6(1,10))^2        1+epsilon^2*(C6(1,11))^2        1+epsilon^2*(C6(1,12))^2
1+epsilon^2*(C6(1,13))^2        1+epsilon^2*(C6(1,14))^2        1+epsilon^2*(C6(1,15))^2
1+epsilon^2*(C6(1,16))^2        1+epsilon^2*(C6(1,17))^2        1+epsilon^2*(C6(1,18))^2
1+epsilon^2*(C6(1,19))^2        1+epsilon^2*(C6(1,20))^2       1+epsilon^2*(C6(1,21))^2]
a6 =  1.0e+005 *
  Columns 1 through 7
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
  Columns 8 through 14
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0001    0.0011    0.0055
  Columns 15 through 21
    0.0206    0.0648    0.1787    0.4463    1.0299    2.2274    4.5630
» T6 = [(a6(1,1))^(-0.5) (a6(1,2))^(-0.5) (a6(1,3))^(-0.5) (a6(1,4))^(-0.5) (a6(1,5))^(-0.5)
(a6(1,6))^(-0.5)    (a6(1,7))^(-0.5)    (a6(1,8))^(-0.5)    (a6(1,9))^(-0.5)    (a6(1,10))^(-0.5)
(a6(1,11))^(-0.5)  (a6(1,12))^(-0.5)  (a6(1,13))^(-0.5)  (a6(1,14))^(-0.5)  (a6(1,15))^(-0.5)
(a6(1,16))^(-0.5)  (a6(1,17))^(-0.5)  (a6(1,18))^(-0.5)  (a6(1,19))^(-0.5)  (a6(1,20))^(-0.5)
(a6(1,21))^(-0.5)]
T6 =
  Columns 1 through 7
    0.8944    0.9245    0.9846    0.9920    0.9313    0.8944    0.9360
  Columns 8 through 14
    0.9996    0.9360    0.9108    0.8944    0.2679    0.0951    0.0427
  Columns 15 through 21
    0.0220    0.0124    0.0075    0.0047    0.0031    0.0021    0.0015
»
» plot (w,T3)
» plot (w,T6)
```





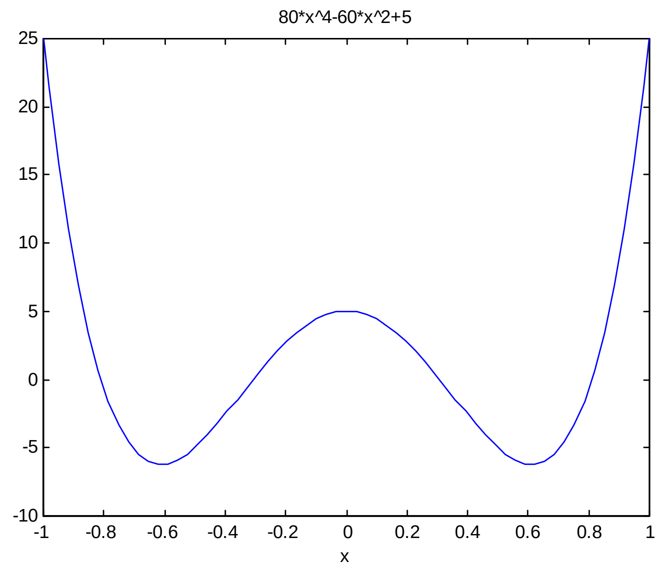
- *Representar los polinomios de Chebyshev en función de los polinomios de Legendre:*

```
» % Sea por ejemplo el polinomio de Chebyshev de orden cuarto:
» % Empezaremos por introducir en la sesión los polinomios de Legendre necesarios:
» syms x
» P0 = 1;
» P1 = x;
» P2 = 1/2*(3*x^2-1);
» P3 = 1/2*(5*x^3-3*x);
» P4 = 1/8*(35*x^4-30*x^2+3);
» P5 = 1/8*(63*x^5-70*x^3+15*x);
»
» % Y también, los polinomios de Chebyshev. Son:
» C0 = 1;
» C1 = x;
» C2 = 2*x^2-1;
» C3 = 4*x^3-3*x;
» C4 = 8*x^4-8*x^2+1;
» C5 = 16*x^5 -20*x^3+5*x;
»
» % Expresar C4 en función de los polinomios de Legendre:
»
» F2 = C4 - 8*8/35*P4
F2 =  - 8/7*x^2+11/35
» F0 = F2+8/7*2/3*P2
F0 =  -1/15
» F = F0 + 1/15*P0
F =  0
»
» % Finalmente:
» C4 = 8*8/35*P4 - 8/7*2/3*P2 - 1/15*P0
C4 = 8*x^4 - 8*x^2+1
```

- *Propiedades de los Polinomios: Valor máximo de la derivada, en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$:*

```
» % En todos los casos, la derivada es máxima en el punto de abscisa x = 1:
» % Sea por ejemplo el Polinomio C5:
»
» syms  x
» C5 = 16*x^5 -20*x^3+5*x;
» diff (C5)
ans = 80*x^4-60*x^2+5
```

» ezplot (diff(C5))
» axis ([-1,1,-10,25])



» % qué ocurre cuando el índice es par; por ejemplo, C6 (x):
»
» C6 = 32*x^6 - 48*x^4 + 18*x^2 - 1;
» diff (C6)
ans = 192*x^5 -192*x^3+36*x
» ezplot (diff(C6))
» axis ([-1,1,-40,40])